به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل چهارم-محاسبه تقریبی انتگرال

در این کاربرگ روش‌هایی برای محاسبه عددی مقدار انتگرال معرفی می‌کنیم. برای این کار از تعریف انتگرال استفاده می‌کنیم. در حقیقت مجموع‌های ریمانی معرفی می‌کنیم که به دلخواه به مقدار انتگرال نزدیک می‌شوند. در این کاربرگ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است.

تعریف ۱. بازه $[a, b]$ را به p زیربازه با طول برابر تقسیم می‌کنیم.

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p = b, \quad a_i = a + i\frac{b-a}{p}\,(i = 0, 1, \cdots, p)$$

و قرار می‌دهیم

$$\text{تقریب چپ} :\ L(p) = \sum_{i=1}^{p}(a_i - a_{i-1})f(a_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{p}\right)(f(a_0) + \cdots + f(a_{p-1}))$$

$$\text{تقریب راست} :\ R(p) = \sum_{i=1}^{p}(a_i - a_{i-1})f(a_i) = \left(\frac{b-a}{p}\right)(f(a_1) + \cdots + f(a_p))$$

فعالیت ۱.

الف) با توجه به تعریف بالا، تقریب نقطه میانی را نیز تعریف کنید. تقریب نقطه میانی را با $M(p)$ نشان می‌دهیم.

ب) با توجه به تعریف بالا، تقریب ذوزنقه‌ای را نیز تعریف کنید. در تقریب ذوزنقه‌ای به جای تقریب زدن با مستطیل به وسیله ذوزنقه تقریب می‌زنیم. تقریب ذوزنقه‌ای را با $T(p)$ نمایش می‌دهیم.

ج) ارتباط تقریب ذوزنقه‌ای با تقریب چپ و راست چیست؟

آنچه که در تقریب زدن همیشه مهم بوده است، کنترل کردن خطا است. یعنی همیشه باید بدانیم که چقدر به مقدار واقعی نزدیک هستیم و اگر بخواهیم تا به میزان خاصی نزدیک مقدار واقعی شویم تا چه اندازه باید دقت محاسبات را بالا ببریم.

فعالیت ۲. در این فعالیت می‌خواهیم خطای تقریب چپ را طی چند گام بدست آوریم. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. قرار دهید

$$E = \int_a^b f - L(p).$$

الف) نشان دهید $E = \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})\left(f(x_i^*) - f(x_{i-1})\right)$، که در آن x_i^* از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال بدست می‌آید.

ب) با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای مشتق، بدست آورید $|E| \leq \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})^2 f'(c_i)$ که در آن c_i نقطه‌ای بین x_{i-1} و x_i^* است.

ج) اگر M_1 کران بالایی برای $|f'|$ روی بازه $[a,b]$ باشد، نتیجه بگیرید که

$$|E| \leq h \cdot (b-a) \cdot M_1$$

که در آن $h = (b-a)/p$.

فعالیت ۳. فرض کنید که f دوبار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که اگر $f'' > 0$ روی بازه $[a,b]$ ($f'' < 0$ روی بازه $[a,b]$) آنگاه

$$M(p) \leq \int_a^b f \leq T(p) \quad \left(T(p) \leq \int_a^b f \leq M(p)\right).$$

اگر خطای تقریب ذوزنقه‌ای را با E_T و خطای تقریب نقطه میانی را E_M نمایش بدهیم می‌توان ثابت کرد:

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} h^2 (b-a) M_2,$$
$$|E_M| \leq \frac{1}{24} h^2 (b-a) M_2,$$

که در آن M_2 کران بالایی برای $|f''|$ روی بازه $[a,b]$ است.

فعالیت ۴. تقریب‌های راست، چپ، میانی و ذوزنقه‌ای را از نظر دقت با هم مقایسه کنید.

می‌توان تقریب‌های بهتری نیز در نظر گرفت. به طور مثال می‌توان به جای خط افقی مانند تقریب راست، چپ یا نقطه میانی و یا به جای خط مایل مانند تقریب ذوزنقه‌ای از چندجمله‌ای‌هایی استفاده کرد که نزدیک تابع هستند. به طور مثال اگر سهمی گذرنده از سه نقطه چپ، راست و میانی را در نظر بگیرید، تقریب جدیدی به دست می‌آید که به تقریب سیمسن معروف است. اگر خطای این تقریب را با E_S نمایش بدهیم می‌توان نشان داد که اگر f چهار بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$|E_S| \leq \frac{۱}{۱۸۰} h^۴ (b-a).M_۴,$$

که در آن $M_۴$ کران بالایی برای قدرمطلق مشتق چهارم f روی بازه $[a,b]$ است.

فعالیت ۵. اگر تقریب سیمسن را با $S(p)$ نمایش دهیم، نشان دهید که

الف) اگر f سهمی باشد، آنگاه مقدار $S(p)$ با مقدار انتگرال برابر است.

ب) $S(p) = \frac{۱}{۳}(۲M(p) + T(p))$.

ج) با استفاده از قسمت (ب)، نتیجه بگیرید اگر $f'' > ۰$ آنگاه خطای تخمین سیمسن بهتر از خطای نقطه میانی و یا ذوزنقه‌ای است.